CIRANO

Allier savoir et décision

ESTIMATION PRATIQUE DE MODÈLES DE VOLATILITÉ STOCHASTIQUE À HAUTE DIMENSION AVEC DES APPLICATIONS À L'INCERTITUDE MACROÉCONOMIQUE AU QUÉBEC ET AU CANADA

MD. NAZMUL AHSAN
JEAN-MARIE DUFOUR
GABRIEL RODRIGUEZ-RONDON

RP

2025RP-19
RAPPORT DE PROJET

CIRANO
Allier savoir et décision

Les rapports de projet sont destinés plus spécifiquement aux partenaires et à un public informé. Ils ne sont ni écrits à des fins de publication dans des revues scientifiques ni destinés à un public spécialisé, mais constituent un médium d'échange entre le monde de la recherche et le monde de la pratique.

Project Reports are specifically targeted to our partners and an informed readership. They are not destined for publication in academic journals nor aimed at a specialized readership, but are rather conceived as a medium of exchange between the research and practice worlds.

Le CIRANO est un organisme sans but lucratif constitué en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du gouvernement du Québec, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Quebec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the government of Quebec, and grants and research mandates obtained by its research teams.

Les partenaires du CIRANO – *CIRANO Partners*

Partenaires Corporatifs - Corporate Partners

Autorité des marchés financiers
Banque de développement du Canada
Banque du Canada
Banque Nationale du Canada
Bell Canada
BMO Groupe financier
Caisse de dépôt et placement du Québec
Énergir
Hydro-Québec
Intact Corporation Financière
Investissements PSP
Manuvie
Mouvement Desjardins
Power Corporation du Canada
Pratt & Whitney Canada
VIA Rail Canada

Partenaires gouvernementaux - Governmental partners

Ministère des Finances du Québec
Ministère de l'Économie, de l'Innovation et de l'Énergie
Innovation, Sciences et Développement Économique Canada
Ville de Montréal

Partenaires universitaires - University Partners

École de technologie supérieure
École nationale d'administration publique de Montréal
HEC Montreal
Institut national de la recherche scientifique
Polytechnique Montréal
Université Concordia
Université de Montréal
Université de Sherbrooke
Université du Québec
Université du Québec à Montréal
Université Laval
Université McGill

Le CIRANO collabore avec de nombreux centres et chaires de recherche universitaires dont on peut consulter la liste sur son site web. CIRANO collaborates with many centers and university research chairs; list available on its website.

© Sept 2025. Md. Nazmul Ahsan, Jean-Marie Dufour et Gabriel Rodriguez-Rondon. Tous droits réservés. *All rights reserved.* Reproduction partielle permise avec citation du document source, incluant la notice ©. *Short sections may be quoted without explicit permission, if full credit, including © notice, is given to the source.*

Les idées et les opinions émises dans cette publication sont sous l'unique responsabilité des auteurs et ne représentent pas les positions du CIRANO ou de ses partenaires. *The observations and viewpoints expressed in this publication are the sole responsibility of the authors; they do not represent the positions of CIRANO or its partners.*

ISSN 1499-8629 (version en ligne)

Estimation pratique de modèles de volatilité stochastique à haute dimension avec des applications à l'incertitude macroéconomique au Québec et au Canada[*]

Md. Nazmul Ahsan[†], *Jean-Marie Dufour*[‡], *Gabriel Rodriguez-Rondon*[§]

Résumé/Abstract

Les covariances stochastiques sont essentielles pour la modélisation macroéconomique et financière, en particulier pour capturer l'incertitude et les interdépendances dynamiques. Cette étude introduit le cadre VAR avec facteurs dynamiques et volatilité multivariée stochastique d'ordre supérieur (DFAVAR-HMSV) et propose une méthodologie d'estimation computationnellement efficace. Le modèle proposé capture des interdépendances dynamiques complexes, des effets de levier et une persistance d'ordre supérieur dans les structures de volatilité. En appliquant ce cadre à la construction des indices d'incertitude pour le Canada et le Québec, cette étude fournit des informations critiques sur les dynamiques macroéconomiques régionales et nationales.

Stochastic covariances are critical for macroeconomic and financial modelling, particularly in capturing uncertainty and dynamic interdependencies. This study introduces the Dynamic Factor Augmented VAR with Higher-order Multivariate Stochastic Volatility (DFAVAR-HMSV) framework, along with a computationally efficient estimation methodology. The proposed model captures complex dynamic interdependencies, leverage effects, and higher-order persistence in volatility structures. Applying this framework to construct uncertainty indices for Canada and Québec, the study provides critical insights into regional and national macroeconomic dynamics.

Mots-clés/Keywords : Incertitude macroéconomique, volatilité stochastique multivariée, modèles factoriels dynamiques, économétrie à haute dimension, prévision, analyse politique / Macroeconomic uncertainty, multivariate stochastic volatility, dynamic factor models, high-dimensional econometrics, forecasting, policy analysis.

---

[*] Ce document est un rapport et est associé au projet "Méthodes d'estimation pratiques et fiables pour les modèles de volatilité stochastique multivariés à haute dimension avec des applications macroéconomiques", financé par le Ministère des Finances du Québec et le CIRANO [MinFin 8182 22-23 PoMEQ Méth. estimation (JM Dufour)]. Les auteurs tiennent à remercier Jérome Blanc, Raymond Fournier, Francis Hébert, the Ministère des Finances du Québecet le CIRANO pour leur soutien.

[†] Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO). Adresse postale : 1130 Sherbrooke West, Suite 1400, Montréal, Québec, H3A 2M8, Canada; e-mail: ahsann@cirano.qc.ca.

[‡] William Dow Professeur d'économie, Université McGill, Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), and Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ). Adresse postale : Département d'économie, Université McGill, édifice Leacock, salle 414, 855, rue Sherbrooke Ouest, Montréal, Québec H3A 2T7, Canada. TEL: (1) 514 398 6071; FAX: (1) 514 398 4800; e-mail: jean-marie.dufour@mcgill.ca. Web page: http://www.jeanmariedufour.com

[§] Candidat au doctorat, Département d'économie, Université McGill et Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO). Adresse postale : Department of Economics, McGill University. e-mail: gabriel.rodriguezrondon@ mail.mcgill.ca. Wed page: https://grodriguezrondon.com

Codes JEL/JEL Codes : C32, C53, C55, E37

Pour citer ce document / To quote this document
Ahsan, M. N., Dufour, J.-M., & Rodriguez, G. (2025). Estimation pratique de modèles de volatilité stochastique à haute dimension avec des applications à l'incertitude macroéconomique au Québec et au Canada (2025RP-19, Rapports de projets, CIRANO.)
https://doi.org/10.54932/XBOU8314

Résumé Étendu

La mesure et la prévision de l'incertitude constituent un défi majeur dans la modélisation macroéconomique et financière, avec des implications importantes pour les prévisions et la conception des politiques. Les systèmes à haute dimension, caractérisés par l'interaction dynamique de nombreuses variables, exigent des cadres avancés capables de saisir les volatilités stochastiques variables dans le temps et les interdépendances complexes. Cette étude, qui aborde ces défis, présente le cadre VAR dynamique augmenté par des facteurs avec volatilité stochastique multivariée d'ordre supérieur (DFAVAR-HMSV). Il offre une approche efficace sur le plan computationnel et statistiquement robuste pour modéliser l'incertitude. S'appuyant sur les méthodes de Ahsan and Dufour (2021, 2023), le modèle DFAVAR-HMSV intègre une structure factorielle dynamique pour réduire la dimensionnalité, ainsi qu'une composante de volatilité stochastique multivariée pour saisir la dynamique de l'incertitude temporelle et transversale. Le cadre utilise un processus d'estimation en deux étapes, combinant l'analyse en composantes principales (ACP) pour l'extraction des facteurs et un estimateur VARMA winsorisé pour les paramètres de volatilité. Cette approche atténue ce qu'on appelle la malédiction de la dimensionnalité, garantissant la faisabilité et la cohérence dans des contextes à haute dimensionnalité. Le modèle est appliqué à la construction d'indices d'incertitude pour le Canada et le Québec, prolongeant la méthodologie de Jurado et al. (2015). À partir d'un riche ensemble de données provenant de la Grande base de données macroéconomiques du Canada et du Québec, les indices sont dérivés des moyennes transversales des volatilités prévues. Les résultats indiquent une forte synchronisation des indices d'incertitude pendant les récessions, reflétant l'impact uniforme des chocs macroéconomiques, tandis que la divergence pendant les périodes stables met en évidence les caractéristiques économiques régionales. Cette étude fait progresser la modélisation de la volatilité stochastique en abordant les contraintes de calcul et étend l'analyse de l'incertitude macroéconomique à un contexte régional, offrant des informations cruciales pour les décideurs politiques et les prévisionnistes.

Classifications JEL : C32, C53, C55, E37

Mots-clés : Incertitude macroéconomique, volatilité stochastique multivariée, modèles factoriels dynamiques, économétrie à haute dimension, prévision, analyse politique.

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Cadre D'Analyse **7**
2.1 Modèle factoriel avec matrice de covariance variable dans le temps 7
2.2 Représentation espace d'états du modèle HMSV 9
2.3 Indice d'incertitude 10

3 Estimation **11**
3.1 Estimation des facteurs, des charges factorielles et du nombre de facteurs 11
3.1.1 Estimation des charges factorielles 12
3.1.2 Estimation des incréments des facteurs et du nombre de facteurs 12
3.2 Estimation des paramètres du modèle MSV 12
3.2.1 Estimation en forme fermée fondée sur un modèle VARMA 13
3.2.2 Estimation winsorisée basée sur un modèle VARMA 14

4 Prévision avec les modèles MSV(p) **16**

5 Construction d'indices d'incertitude pour le Canada et le Québec **18**

6 Comparaison avec Moran et al. (2022) **24**

7 Conclusion **26**

Annexe **30**

1 Introduction

La mesure et la prévision de l'incertitude constituent un problème central dans la modélisation macroéconomique et financière, avec des implications profondes pour les prévisions, l'élaboration des politiques et la gestion de portefeuille. À mesure que les systèmes économiques deviennent de plus en plus complexes, alimentés par les progrès en matière de collecte de données et la prolifération des bases de données macroéconomiques à grande échelle, le défi consiste à saisir et à prévoir efficacement l'incertitude dans plusieurs dimensions. Cette tâche devient particulièrement ardue dans des contextes à haute dimensionnalité où de nombreuses variables interagissent de manière dynamique et persistante au fil du temps. Il est essentiel de relever ces défis, car l'incertitude sert de mesure centrale pour comprendre la résilience économique, prévoir les risques et orienter les interventions politiques.

Un aspect clé de cette étude est la modélisation et la prévision de matrices de covariance conditionnelles à haute dimension, qui sont fondamentales pour quantifier l'incertitude en macroéconomie et en finance. La nature dynamique et persistante de ces matrices nécessite des méthodes sophistiquées capables de traiter à la fois les volatilités stochastiques variables dans le temps et les interdépendances entre les variables. Des travaux récents tels que Jurado et al. (2015), Carriero et al. (2018) et Beliansk et al. (2021) ont démontré l'importance des modèles de volatilité stochastique pour améliorer l'ajustement statistique et les performances de prévision dans les systèmes macroéconomiques. Ces études soulignent le caractère réaliste des covariances stochastiques dans la capture des prévisions de densité, de la dynamique d'équilibre général et des mesures d'incertitude. De plus, l'inclusion des volatilités stochastiques s'est avérée essentielle pour améliorer les performances empiriques des autorégressions vectorielles macroéconomiques à grande échelle (VAR), comme l'illustrent Clark (2011), Koop and Korobilis (2013) et d'autres.

Malgré les progrès récents, l'estimation et la prévision des modèles de volatilité stochastique à haute dimension restent des défis importants. La haute dimensionnalité introduit une complexité computationnelle, communément appelée « malédiction de la dimensionnalité ». C'est là que le nombre croissant de variables rend les méthodes d'estimation traditionnelles impraticables. Même dans les systèmes comportant cinq ou six variables, de nombreuses méthodes existantes deviennent computationnellement intraitables ou statistiquement inefficaces. Pour contourner ces limites, les chercheurs imposent souvent des hypothèses restrictives, telles que des contraintes structurelles sur les covariances ou des spécifications de modèles rigides. Bien qu'efficaces dans certains scénarios, ces approches compromettent l'adaptabilité et la généralisation des modèles, en particulier dans des contextes macroéconomiques dynamiques. Les modèles de volatilité stochastique courants [Carriero et al. (2016, 2018), Chan (2020)] et les modèles de vo-

latilité stochastique de Cholesky [Cogley and Sargent (2005), Carriero et al. (2019)]. Les praticiens peuvent rencontrer plusieurs problèmes avec les premières catégories de modèles, notamment le manque de flexibilité de la modélisation, la vitesse d'estimation et l'absence d'inférences causales (par exemple, les effets de contagion).

Cette étude s'appuie sur les méthodes proposées par Ahsan and Dufour (2021, 2023), offrant des estimateurs efficaces sur le plan computationnel et statistiquement robustes pour les modèles de volatilité stochastique multivariée (MSV) à grande échelle. Le cadre VAR dynamique augmenté par des facteurs avec volatilité stochastique multivariée d'ordre supérieur (DFAVAR-HMSV) proposé ici représente une avancée significative dans la modélisation de la volatilité stochastique. Il s'adapte à une configuration flexible à haute dimension qui intègre la structure des facteurs, les dépendances transversales, la dynamique décalée et la persistance d'ordre supérieur dans les volatilités latentes. Ces caractéristiques sont essentielles pour analyser des modèles macroéconomiques complexes, car elles permettent d'intégrer davantage de secteurs, de variables et de chocs tout en conservant la faisabilité computationnelle. La structure factorielle dynamique du modèle DFAVAR-HMSV permet une réduction efficace des dimensions, tandis que sa composante de volatilité stochastique multivariée capture plus efficacement que les modèles existants la dynamique temporelle et transversale de l'incertitude.

La stratégie d'estimation utilisée dans cette étude implique une procédure en deux étapes qui est peu coûteuse sur le plan computationnel tout en restant statistiquement rigoureuse. Dans une première étape, les facteurs dynamiques sont estimés à l'aide de l'analyse en composantes principales (ACP), tandis que les composantes autorégressives vectorielles (VAR) sont ajustées. Dans une seconde étape, les paramètres de volatilité sont estimés à l'aide de l'estimateur VARMA tronqué (winsorisé) proposé par Ahsan and Dufour (2023). Cette approche atténue les difficultés liées à la haute dimensionnalité des matrices de covariance en utilisant des algorithmes efficaces et des propriétés statistiques robustes, notamment la cohérence $\sqrt{T}$ et la normalité asymptotique. En outre, le filtre de Kalman est utilisé pour calculer les prévisions de volatilité, ce qui permet de construire des indices d'incertitude à différents horizons.

Le cadre de modélisation proposé présente une grande applicabilité en macroéconomie. Dans cette étude, nous utilisons ces méthodes pour construire des indices d'incertitude pour le Canada et le Québec. Ce travail prolonge la méthodologie développée par Jurado et al. (2015) et complète l'analyse de l'incertitude macroéconomique au Canada et au Québec, initialement examinée par Moran et al. (2022). Notre approche élargit la portée de l'analyse en intégrant un éventail plus large de variables macroéconomiques et financières, en tenant compte à la fois des dépendances contemporaines et croisées dans les volatilités, ainsi que des dépendances transversales dans les termes d'erreur. Les données canadiennes proviennent

de la grande base de données macroéconomiques canadienne (LCDMA) de Fortin-Gagnon et al. (2022), tandis que des données régionales supplémentaires pour le Québec sont incluses afin de constituer un ensemble de données complet. Les indices d'incertitude sont construits en calculant les moyennes transversales des volatilités prédites, lesquelles reflètent l'incertitude agrégée à travers les variables d'intérêt. En modélisant les dynamiques d'incertitude régionales et nationales, cette approche offre un éclairage précieux sur la résilience économique et les interdépendances durant les périodes de tensions ou de stabilité macroéconomique.

Les résultats empiriques mettent en évidence plusieurs observations clés. Premièrement, les indices d'incertitude construits pour le Canada et le Québec présentent une forte synchronisation lors des récessions, en particulier aux horizons de prévision plus longs. Ce phénomène souligne l'impact généralisé des chocs macroéconomiques, qui tendent à amplifier l'incertitude tant au niveau régional que national de manière coordonnée. Deuxièmement, en période de stabilité, la divergence des dynamiques d'incertitude entre le Canada et le Québec révèle l'influence des caractéristiques économiques régionales et des facteurs sectoriels spécifiques. Enfin, les résultats démontrent que le cadre DFAVAR-HMSV fournit des prévisions robustes et empiriquement pertinentes, renforçant l'utilité des modèles à volatilité stochastique dans des applications macroéconomiques à haute dimension.

Les contributions de cette étude sont doubles : sur le plan méthodologique, elle fait progresser la littérature sur les modèles de volatilité stochastique en haute dimension en répondant aux défis computationnels et statistiques par des techniques d'estimation innovantes. Sur le plan empirique, elle étend l'analyse de l'incertitude macroéconomique au contexte régional, offrant une compréhension claire des interactions entre les dynamiques régionales et nationales. Ces résultats ont des implications importantes pour les décideurs et les prévisionnistes, en soulignant l'importance de prendre en compte les spécificités régionales dans l'élaboration de politiques économiques efficaces et dans l'amélioration de la précision des prévisions.

L'article est structuré comme suit. La section 2 présente notre cadre d'analyse, tandis que la section 2.1 spécifie le modèle ainsi que ses hypothèses. La section 3 propose des estimateurs simples, la section 4 décrit l'utilisation du filtre de Kalman à des fins de prévision, la section 5 présente les applications empiriques, et la section 6 offre une comparaison avec l'analyse de Moran et al. (2022). Nous concluons en section 7, tandis que les données et les variables sont décrites en annexe

2 Cadre D'Analyse

2.1 Modèle factoriel avec matrice de covariance variable dans le temps

Les indices d'incertitude de Jurado et al. (2015) ainsi que ceux considérés ici sont construits à partir de la prévision de la volatilité de variables macroéconomiques et financières. Pour obtenir ces prévisions de volatilité, nous utilisons un modèle VAR augmenté de facteurs avec un cadre de volatilité stochastique multivariée d'ordre supérieur.

Hypothèse 2.1. MODÈLE VAR AUGMENTÉ DE FACTEURS AVEC VOLATILITÉ STOCHASTIQUE MULTIVARIÉE D'ORDRE SUPÉRIEUR. *Soit $\boldsymbol{y}_t = (y_{1t},\dots,y_{Nt})'$ un vecteur de N séries observées à la date t, et soit $\boldsymbol{f}_t = (f_{1t},\dots,f_{Kt})'$ un vecteur de K facteurs latents. À l'instar du modèle classique VAR augmenté de facteurs, les séries sont déterminées par des retards autorégressifs, des facteurs latents, ainsi que par N chocs idiosyncratiques. Il est important de noter que la volatilité des facteurs latents et des chocs est supposée varier dans le temps. Plus précisément, les modèles pour les séries et les facteurs sont donnés par :*

$$\boldsymbol{y}_t = \Phi_1^y \boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \Phi_{p_y}^y \boldsymbol{y}_{t-p_y} + \Lambda \boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{V}_t^{1/2} \boldsymbol{u}_{yt}, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A_1} \boldsymbol{f}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{A_{p_f}} \boldsymbol{f}_{t-p_f} + \boldsymbol{S}_t^{1/2} \boldsymbol{u}_{ft}, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{h}_{t+1} = \mu + \sum_{j=1}^{p} \phi_j (\boldsymbol{h}_{t-j+1} - \mu) + \boldsymbol{v}_{t+1}, \tag{2.3}$$

où Λ, $\boldsymbol{A}_{k_f}$, Φ_j^y et ϕ_j sont des matrices de coefficients de dimensions respectives $(N \times K)$, $(K \times K)$, $(N \times N)$ et $((N+K) \times (N+K))$, et

$$\boldsymbol{V}_t^{1/2} = \text{diag}[\exp(h_{1t}/2),\dots,\exp(h_{Nt}/2)], \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{S}_t^{1/2} = \text{diag}[\exp(h_{N+1,t}/2),\dots,\exp(h_{N+K,t}/2)], \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{h}_t = (h_{yt}, h_{ft})', \quad \boldsymbol{h}_{yt} = (h_{1t},\dots,h_{Nt})', \quad \boldsymbol{h}_{ft} = (h_{N+1,t},\dots,h_{N+K,t})', \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{u}_t = (u_{yt}, u_{ft})', \quad \boldsymbol{u}_{rt} = (u_{1t},\dots,u_{Nt})', \boldsymbol{u}_{ft} = (u_{N+1,t},\dots,u_{N+K,t})', \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{v}_t = (v_{yt}, v_{ft})', \quad \boldsymbol{v}_{yt} = (v_{1t},\dots,v_{Nt})', \quad \boldsymbol{v}_{ft} = (v_{N+1,t},\dots,v_{N+K,t})', \tag{2.8}$$

$$\mu = (\mu_{1t},\dots,\mu_{Nt},\mu_{N+1,t},\dots,\mu_{N+K,t})', \quad \boldsymbol{h}_0,\dots,\boldsymbol{h}_{-(p-1)} \sim \boldsymbol{N}_{N+K}(\mu, \boldsymbol{\Sigma}_0) \tag{2.9}$$

Hypothèse 2.2. STRUCTURE DE LA MATRICE DE COVARIANCE DES ERREURS . *La structure de la matrice de*

covariance des erreurs $\boldsymbol{\Sigma}$ *est donnée par*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_v \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_u = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{u_y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{u_f} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_v = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{v_y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{v_f} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Remarque 1. *Caractéristiques du modèle DFAVAR-HMSV.*

- *Dans ce modèle, les chocs affectant les séries macroéconomiques et financières peuvent être corrélés - tout comme les chocs de volatilité. Par conséquent, les séries ainsi que leurs volatilités présentent des dépendances croisées.*
- *Les matrices* ϕ_j *de dimension* $(N+K)\times(N+K)$ *capturent diverses interactions dynamiques dans les log-volatilités :*
  - *Les éléments hors diagonale de* ϕ_{yy} *capturent la causalité de Granger multilatérale dans la volatilité entre les séries, générant une dépendance croisée dans les volatilités des séries.*
  - *Les éléments hors diagonale de* ϕ_{ff} *génèrent une dépendance croisée dans les volatilités des facteurs.*
  - *Les composantes non nulles de* ϕ_{yf} *et* ϕ_{fy} *capturent les effets de levier et de rétroaction de la volatilité entre les séries et les facteurs.*
  - *Les éléments diagonaux de* ϕ_{yy} *et* ϕ_{ff} *capturent la persistance dans les log-volatilités des séries et des facteurs. Pour* $j>1$*, les éléments diagonaux non nuls capturent une persistance d'ordre supérieur.*
- *Pour réduire la charge computationnelle, en particulier lorsque* N *est grand, on peut supposer une indépendance conditionnelle des log-volatilités. Dans ce cas,* $\phi = \text{diag}[\phi_1,\ldots,\phi_N]$ *et* $\boldsymbol{\Sigma}_v = \text{diag}[\sigma^2_{1,v},\ldots,\sigma^2_{N,v}]$ *sont des matrices diagonales.*
- *Si* $\boldsymbol{\Sigma}_v$ *n'est pas diagonale, alors les log-volatilités* $\boldsymbol{h}_t$ *sont corrélées instantanément, ce qui implique une causalité de Granger instantanée.*
- *Pour assurer l'identification, les éléments diagonaux de* $\boldsymbol{\Sigma}_{ur}$ *et* $\boldsymbol{\Sigma}_{uf}$ *doivent être égaux à 1, ce qui en fait des matrices de corrélation.*

Hypothèse 2.3. *Conditions de stationnarité et de positivité définie. Nous formulons les hypothèses suivantes :*

A. $\boldsymbol{V}_t$ *et* $\boldsymbol{S}_t$ *sont définies positives presque sûrement pour chaque* t*.*
B. *Nous supposons que les facteurs suivent un processus AR(*p_f*) stationnaire, c'est-à-dire que* $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ *est soumise à des contraintes telles que* $a_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$*.*
C. *Toutes les valeurs propres des matrices compagnons* $\bar{\boldsymbol{\phi}}^y$ *et* $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ *ont un module strictement inférieur à un,*

où

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}^{y} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_1^{y} & \boldsymbol{\phi}_2^{y} & \dots & \boldsymbol{\phi}_{p_y-1}^{y} & \boldsymbol{\phi}_{p_y} \\ \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_m & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{\phi}} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \dots & \boldsymbol{\phi}_{p-1} & \boldsymbol{\phi}_p \\ \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_m & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

2.2 Représentation espace d'états du modèle HMSV

On définit $\boldsymbol{r}_t$ comme suit :

$$r_{jt} := \begin{cases} y_{jt} - \sum_{k_y=1}^{p_y} \Phi_{k_y}^{y} y_{j,t-k_y} - \Lambda_j \boldsymbol{f}_t & \text{pour } j \le N, \\ f_{i,t} - c_i - \sum_{k_f=1}^{p_f} a_{k_f,ii} f_{i,t-p_f} \quad (i = j-N) & \text{pour } j \ge N+1 \end{cases}$$

En prenant le logarithme élément par élément des carrés et en utilisant $\mathbb{E}[\log(u_{jt}^2)] = -1.2704$, où ι est un vecteur de uns de dimension $(N+K)\times 1$, nous définissons :

$$\boldsymbol{X}_t = \log\circ(\boldsymbol{r}_t^2) + (1.2704)\iota \tag{2.12}$$

On obtient alors l'équation de mesure :

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{h}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \tag{2.13}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}_t = \log\circ(\boldsymbol{u}_t^2) - \mathbb{E}[\log\circ(\boldsymbol{u}_t^2)]$.

En combinant (2.3) et (2.13), le modèle DFAVAR-HMSV peut être formulé comme un modèle linéaire en espace d'états : [1]

$$\text{Transition d'état :} \quad \boldsymbol{h}_{t+1} = \mu + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\phi}_j (\boldsymbol{h}_{t-j+1} - \mu) + \boldsymbol{v}_{t+1}, \tag{2.14}$$

$$\text{l'équation de mesure :} \quad \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{h}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{2.15}$$

Sous l'hypothèse de normalité standard de $\boldsymbol{u}_t$, l'erreur transformée, $\boldsymbol{\epsilon}_t$, est une variable aléatoire $(N+K)$-variée de moyenne nulle, suivant une loi $\log(\chi_1^2)$, avec une matrice de covariance Σ_ϵ. Harvey et al. (1994) ont montré que l'élément (i,j) de la matrice de covariance de $\boldsymbol{\epsilon}_t = (\epsilon_{1t},\dots,\epsilon_{N+K,t})'$ est donné par $(\pi^2/2)\rho_{ij}^*$,

1. Notons que plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature exploitant la forme en espace d'états des modèles à volatilité stochastique ; voir Harvey, Ruiz and Shephard (1994), Ruiz (1994), Shephard (1994), Breidt and Carriquiry (1996), Harvey and Shephard (1996), Kim, Shephard and Chib (1998), Sandmann and Koopman (1998), Steel (1998), Chib, Nardari and Shephard (2002), Knight, Satchell and Yu (2002), Francq and Zakoïan (2006), Omori, Chib, Shephard and Nakajima (2007).

where $\rho^*_{ii} = 1$ et

$$\rho^*_{ij} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\left[\prod_{k=1}^{n}(1/2+k-1)\right] n} \rho_{ij}^{2n} \tag{2.16}$$

Notez que les valeurs absolues des paramètres inconnus dans $\boldsymbol{\Sigma}_u$, c'est-à-dire les ρ_{ij}, les corrélations croisées entre différents u_{it}, peuvent être estimées, mais pas leurs signes, car les informations pertinentes sont perdues lorsque les observations sont élevées au carré. Toutefois, comme le suggèrent Harvey et al. (1994), les signes de ces estimations peuvent être récupérés en revenant aux observations non transformées, en notant que le signe de chacun des produits $u_i u_j, i, j = 1, \ldots, T$, est le même que celui des produits correspondants $r_i r_j$. Ainsi, le signe de ρ_{ij} est estimé comme positif si plus de la moitié des produits $r_i r_j$ sont positifs.

2.3 Indice d'incertitude

À des fins de prévision, il est plus simple de travailler avec la forme compagnon empilée suivante du modèle :

$$\mathcal{Y}_{jt} = \underset{[(1+K)q\times 1]}{\begin{bmatrix} Y_{jt} \\ \hat{F}_t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \underset{[q\times q]}{\bar{\boldsymbol{\phi}}^y} & \underset{[q\times qK]}{\Lambda_j} \\ \underset{[qK\times q]}{\mathbf{0}} & \underset{[qK\times qK]}{\bar{\mathbf{A}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{jt-1} \\ \hat{F}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta^Y_{jt} \\ \eta^F_t \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

ou, de manière plus compacte,

$$\mathcal{Y}_{jt} = \Phi^{\mathcal{Y}}_j \mathcal{Y}_{j,t-1} + \eta^{\mathcal{Y}}_{jt}, \tag{2.18}$$

où la prévision à l'horizon h est simplement donnée par

$$E_t \mathcal{Y}_{jt+h} = (\Phi^{\mathcal{Y}}_j)^h \mathcal{Y}_{jt} \tag{2.19}$$

et la variance de l'erreur de prévision au temps t est

$$\Omega^{\mathcal{Y}}_{jt}(h) = E_t\left[\left(\mathcal{Y}_{jt+h} - E_t\mathcal{Y}_{jt+h}\right)\left(\mathcal{Y}_{jt+h} - E_t\mathcal{Y}_{jt+h}\right)'\right]. \tag{2.20}$$

Comme discuté dans Jurado et al. (2015), pour $h = 1$

$$\Omega^{\mathcal{Y}}_{jt}(1) = E_t\left[\eta^{\mathcal{Y}}_{jt+1}\eta^{\mathcal{Y}'}_{jt+1}\right] \tag{2.21}$$

mais pour $h > 1$

$$\Omega^{\mathcal{Y}}_{jt}(h) = \Phi^{\mathcal{Y}}_j \Omega^{\mathcal{Y}}_{jt}(h-1)(\Phi^{\mathcal{Y}}_j)' + E_t\left[\eta^{\mathcal{Y}}_{jt+h}\eta^{\mathcal{Y}'}_{jt+h}\right]. \tag{2.22}$$

À partir de là, l'incertitude à l'horizon h pour la série d'intérêt j est donnée par

$$\mathcal{U}^{y}_{jt}(h) = \sqrt{1'_j \Omega^{\mathcal{Y}}_{jt}(h) 1_j} \tag{2.23}$$

où 1_j est un vecteur de sélection. Pour obtenir l'indice d'incertitude agrégé, nous calculons alors

$$\mathcal{U}^{y}_{csa,t}(h) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathcal{U}^{y}_{jt}(h)\,. \tag{2.24}$$

La principale différence entre l'indice proposé ici et celui initialement proposé dans Jurado et al. (2015) réside dans le fait que, dans notre cadre de volatilité stochastique, nous autorisons les relations contemporaines et les relations décalées d'ordre supérieur au sein et entre les volatilités, ainsi que les dépendances transversales dans les termes d'erreur, ce qui permet d'obtenir un cadre de volatilité stochastique beaucoup plus riche. Cela devrait conduire à des performances de prévision plus robustes et empiriquement pertinentes et, par conséquent, à un indice d'incertitude amélioré.

3 Estimation

3.1 Estimation des facteurs, des charges factorielles et du nombre de facteurs

Pour M observations et N variables, considérons le modèle factoriel sous forme matricielle :

$$\underbrace{Y}_{(M\times N)} = \underbrace{Z}_{(M\times P)}\underbrace{B}_{(P\times N)} + \underbrace{F}_{(M\times K)}\underbrace{\Lambda'}_{(K\times N)} + \underbrace{e}_{(M\times N)}, \tag{3.1}$$

où Y est la matrice des données observées, Z est une matrice contenant les valeurs décalées de Y (et éventuellement d'autres régresseurs), M désignant le nombre d'observations et P le nombre total de ces régresseurs, et B étant la matrice des coefficients correspondants. Les matrices F et Λ représentent respectivement les facteurs communs et les chargements factoriels, K désignant le nombre de facteurs.

Pour un K donné, l'objectif est d'estimer Λ et F. Ceux-ci ne sont identifiés que jusqu'à une transformation linéaire inversible, car Y est observé, mais F et Λ ne le sont pas. Pour parvenir à l'identification, la normalisation standard imposée est la suivante :

$$\frac{\hat{\Lambda}'\hat{\Lambda}}{N} = I_K \quad \text{et} \quad \hat{F}'\hat{F} \text{ est diagonale.}$$

Ces normalisations garantissent que $\hat{F}$ et $\hat{\Lambda}$ sont identifiés d'une manière qui rend leur interprétation unique, à l'exception des transformations triviales.

3.1.1 Estimation des charges factorielles

La matrice des coefficients Λ dans un modèle factoriel représente la sensibilité des variables observées aux facteurs sous-jacents. L'estimateur des coefficients $\hat{\Lambda}$ est défini comme les vecteurs propres associés aux K plus grandes valeurs propres de $\frac{1}{N}Y'Y$ multipliées par $\sqrt{N}$. En effet, les vecteurs propres correspondant aux plus grandes valeurs propres capturent les directions de variance maximale dans les données, qui sont supposées correspondre aux facteurs sous-jacents. Cette méthode d'estimation est connue sous le nom d'analyse en composantes principales (ACP), une procédure statistique qui utilise une transformation orthogonale pour convertir un ensemble d'observations de variables potentiellement corrélées en un ensemble de valeurs de variables linéairement non corrélées appelées composantes principales.

3.1.2 Estimation des incréments des facteurs et du nombre de facteurs

Les incréments de facteurs représentent les changements des facteurs au fil du temps. L'estimateur des incréments de facteurs $\hat{F}$ est donné par $\frac{1}{N}Y\hat{\Lambda}$. En effet, les incréments de facteurs sont supposés être les projections des données observées sur l'espace engendré par les chargements factoriels estimés.

Ces estimateurs sont basés sur les hypothèses du modèle factoriel et les propriétés de l'ACP. Ils permettent d'extraire les facteurs sous-jacents des données observées et d'estimer leur évolution dans le temps.

Il est important de noter que ces estimateurs sont basés sur une théorie asymptotique, ce qui signifie qu'ils deviennent plus précis à mesure que le nombre d'observations M et la dimensionnalité N tendent vers l'infini. En pratique, M et N sont finis, de sorte que ces estimateurs fournissent des approximations des chargements factoriels et des incréments factoriels réels. Pour sélectionner le nombre de facteurs (K), nous utilisons la méthode basée sur les critères d'information proposée par Bai and Ng (2002).

3.2 Estimation des paramètres du modèle MSV

Dans cette section, nous examinons l'estimation des paramètres du modèle de volatilité donné dans l'estimation de la première étape.

3.2.1 Estimation en forme fermée fondée sur un modèle VARMA

Ahsan and Dufour (2023) ont proposé des estimateurs simples pour le modèle MSV en exploitant la représentation VARMA du processus $\boldsymbol{X}_t$. Ils ont dérivé la représentation VARMA(p, p) suivante pour $\boldsymbol{X}_t$:

$$\boldsymbol{X}_t = \mu + \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\phi}_j (\boldsymbol{X}_{t-j} - \mu) + \eta_t - \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\theta}_j \eta_{t-j}, \tag{3.1}$$

où $\eta_t - \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\theta}_j \eta_{t-1} = \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t - \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}$ admet un processus VMA(p), et les processus d'erreur $\boldsymbol{v}_t$ et $\boldsymbol{\epsilon}_t$ sont des vecteurs aléatoires indépendants avec des matrices de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_v$ et $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon$, respectivement. Compte tenu de la représentation VARMA ci-dessus, $\boldsymbol{X}_t$ défini dans (2.12) a les autocovariances suivantes :

$$\operatorname{Cov}\left((\boldsymbol{X}_t - \mu)(\boldsymbol{X}_{t-k} - \mu)'\right) := \boldsymbol{\Gamma}_k = \begin{cases} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} + \cdots + \boldsymbol{\phi}_p \boldsymbol{\Gamma}_{k-p} + \boldsymbol{\Sigma}_v + \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon; & \text{if } k = 0, \\ \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} + \cdots + \boldsymbol{\phi}_p \boldsymbol{\Gamma}_{k-p} - \boldsymbol{\phi}_k \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon; & \text{if } 1 \le k \le p, \\ \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} + \cdots + \boldsymbol{\phi}_p \boldsymbol{\Gamma}_{k-p}; & \text{if } k > p. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ahsan and Dufour (2023) a proposé l'estimateur fermé suivant pour le modèle MSV, qui exploite la structure d'autocovariance de $\boldsymbol{X}_t$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_{(p)} &= \boldsymbol{\Gamma}_{(p+j)} \boldsymbol{\Gamma}_{[p+j-1]}^{-1} \quad j \ge 1, \\ \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon &= \boldsymbol{\Gamma}_0 + \boldsymbol{\phi}_1^{-1} \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\phi}_{j+1} \boldsymbol{\Gamma}_j' - \boldsymbol{\phi}_1^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_1, \\ \boldsymbol{\Sigma}_v &= \boldsymbol{\phi}_1^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_1 - \boldsymbol{\phi}_1^{-1} \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\phi}_{j+1} \boldsymbol{\Gamma}_j' - \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\Gamma}_j', \\ \mu &= \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

où

$$\underset{m \times pm}{\boldsymbol{\phi}_{(p)}} := \begin{bmatrix} \underset{m \times m}{\boldsymbol{\phi}_1} & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\phi}_2} & \cdots & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\phi}_p} \end{bmatrix}, \quad \underset{m \times pm}{\boldsymbol{\Gamma}_{(p+j)}} := \begin{bmatrix} \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{p+j}} & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{p+j+1}} & \cdots & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{2p+j-1}} \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\underset{pm \times pm}{\boldsymbol{\Gamma}_{[p+j-1]}} := \begin{bmatrix} \underset{m \times pm}{\boldsymbol{\Gamma}_{(p+j-1)}} \\ \underset{m \times pm}{\boldsymbol{\Gamma}_{(p+j-2)}} \\ \vdots \\ \underset{m \times pm}{\boldsymbol{\Gamma}_{(j)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{p+j-1}} & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{p+j}} & \cdots & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{2p+j-2}} \\ \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{p+j-2}} & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{p+j-1}} & \cdots & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{2p+j-3}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_j} & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{j+1}} & \cdots & \underset{m \times m}{\boldsymbol{\Gamma}_{p+j-1}} \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

et p étant l'ordre MSV, avec $\boldsymbol{\Gamma}_k = \operatorname{Cov}\left((\boldsymbol{X}_t - \mu)(\boldsymbol{X}_{t-k} - \mu)'\right)$.

Étant donné les données, il est naturel d'estimer $\boldsymbol{\Gamma}_k$ et μ à partir des moments empiriques correspon-

dants :

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k = \frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T-k}\left[\left(\boldsymbol{X}_{t+k}-\hat{\mu}\right)\left(\boldsymbol{X}_t-\hat{\mu}\right)'\right], \quad \hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{X}_t \tag{3.6}$$

En posant $j = 1$ dans (3.3) et en remplaçant les moments théoriques par les moments empiriques correspondants, on obtient l'estimateur VARMA de forme fermée suivant des coefficients MSV(p) :

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{(p)} = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+1)}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{[p]}^{-1}, \tag{3.7}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\epsilon = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 + \hat{\boldsymbol{\phi}}_1^{-1}\sum_{j=1}^{p-1}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{j+1}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_j' - \hat{\boldsymbol{\phi}}_1^{-1}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_1, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_v = \hat{\boldsymbol{\phi}}_1^{-1}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_1 - \hat{\boldsymbol{\phi}}_1^{-1}\sum_{j=1}^{p-1}\hat{\boldsymbol{\phi}}_{j+1}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_j' - \sum_{j=1}^{p}\hat{\boldsymbol{\phi}}_j\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_j{}'. \tag{3.8}$$

Notez que, étant donné $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\epsilon$, nous calculons les paramètres de dépendance croisée à l'aide de la méthode proposée par Harvey et al. (1994).

Dans les petits échantillons, l'estimation de $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{(p)}$ peut donner une solution en dehors de la zone admissible (c'est-à-dire avec la possibilité que certaines des valeurs propres du processus de volatilité latente [il s'agit d'un processus VAR(p)] se trouvent en dehors du cercle unité ou soient égales à l'unité). Ce problème peut se poser en particulier dans les petits échantillons ou en présence de valeurs aberrantes. De plus, les valeurs $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{(p)}$, calculées en choisissant différents ensembles d'équations de Yule-Walker, seront en général différentes. Lorsque cela se produit, une solution simple consiste à projeter l'estimation sur l'espace des solutions paramétriques acceptables en modifiant les valeurs propres qui se trouvent sur ou en dehors du cercle unité.

3.2.2 Estimation winsorisée basée sur un modèle VARMA

Cependant, Ahsan and Dufour (2023) montre qu'il est possible d'obtenir une meilleure stabilité et une meilleure efficacité de l'estimateur VARMA en utilisant « winsorisation » qui exploite (3.3). La winsorisation (censure) augmente considérablement la probabilité d'obtenir des valeurs admissibles. À partir de (3.3), il est facile de voir que :

$$\boldsymbol{\phi}_{(p)} = \sum_{j=1}^{\infty}\omega_j\boldsymbol{\Gamma}_{(p+j)}\boldsymbol{\Gamma}_{[p+j-1]}^{-1} \tag{3.9}$$

pour toute suite ω_j de scalaires telle que $\sum_{j=1}^{\infty}\omega_j = 1$ (combinaison convexe). En utilisant (3.9), nous pouvons définir une classe plus générale d'estimateurs pour $\boldsymbol{\phi}_{(p)}$ en prenant une moyenne pondérée de plusieurs échantillons analogues du rapport $\boldsymbol{\Gamma}_{(p+j)}\boldsymbol{\Gamma}_{[p+j-1]}^{-1}$:

$$\tilde{\phi}_{(p)} = \sum_{j=1}^{J}\omega_j\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+j)}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{[p+j-1]}^{-1}, \tag{3.10}$$

où $1 \leq J \leq T-2p$ avec $\sum_{j=1}^{J} \omega_j = 1$ et T est la longueur de la série chronologique. On peut s'attendre à ce qu'une classe suffisamment générale de poids améliore l'efficacité des estimateurs VARMA.

En utilisant (3.10), Ahsan and Dufour (2023) montre qu'une *régression matricielle* (MVR), utilisant le système d'équations suivant avec des poids égaux, donne une solution statistiquement plus efficace :

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+j)} = \hat{\boldsymbol{\phi}}_{(p)} \cdot \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{[p+j-1]}, \quad j = 1, \cdots, J. \tag{3.11}$$

La solution du système ci-dessus est donnée par

$$\hat{\phi}^{MVR}_{(p,J)} = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+1,\mathbb{J})} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}'_{[p,\mathbb{J}]} \left(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{[p,\mathbb{J}]} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}'_{[p,\mathbb{J}]} \right)^{-1}, \tag{3.12}$$

où

$$\underset{m\times pmJ}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+1,\mathbb{J})}} := \begin{bmatrix} \underset{m\times pm}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+1)}} & \underset{m\times pm}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+2)}} & \cdots & \underset{m\times pm}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+J)}} \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

$$\underset{pm\times pmJ}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{[p,\mathbb{J}]}} := \begin{bmatrix} \underset{pm\times pm}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{[p]}} & \underset{pm\times pm}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{[p+1]}} & \cdots & \underset{pm\times pm}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{[p+J-1]}} \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

et J est le paramètre de troncature winsorisé.

Cet estimateur dépend de J et, pour $J = 1$, il est équivalent à l'estimateur VARMA simple donné dans (3.7).

Les estimateurs winsorisés basés sur VARMA sont robustes face aux valeurs aberrantes dues soit à des données contaminées/corrompues, soit à des distributions d'erreurs à queues épaisses. Cette classe d'estimateurs est basée sur des autocovariances d'ordre supérieur, qui sont moins affectées par les valeurs aberrantes que les autocovariances d'ordre inférieur [Voir Politis (2009)]. Il convient de noter que la représentation VARMA faible de $\boldsymbol{X}_t$ n'est pas gaussienne. Dans ce cas, la condition de moment $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+1)}$ qui produit l'estimateur simple n'est pas suffisante dans le cas d'une non-gaussianité. Il semble naturel que dans le contexte de la stationnarité du second ordre, un estimateur général de $\hat{\phi}_{(p)}$ et $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\nu}$ soit une fonction de toutes les informations du second ordre disponibles, c'est-à-dire $\left[\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+1)}, \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+2)}, \cdots, \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(T-2p)}\right]$. Étant donné que $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(k)}$ n'est pas fiable pour les grandes valeurs de k, c'est-à-dire lorsque $T-k$ est petit, il est logique de baser notre estimateur sur $\left[\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+1)}, \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+2)}, \cdots, \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(p+J)}\right]$, où J est supérieur à 1, mais inférieur à $T-2p$; en particulier, nous exigeons que $T-2p$ soit grand, c'est-à-dire que $1 \leq J \leq c \times (T-2p)$ pour un certain $c \in (0,1)$.

De plus, étant donné que la représentation VARMA faible de $\boldsymbol{X}_t$ n'est pas gaussienne, des conditions supplémentaires de moment d'ordre supérieur $J-1$ peuvent apporter des gains d'efficacité asymptotiques substantiels par rapport à l'estimateur simple basé sur la première condition de moment d'ordre inférieur.

Dans ce cas, les conditions de moment d'ordre supérieur ne sont pas redondantes et l'estimateur winsorisé, basé sur ces conditions de moment, ne nécessite pas d'hypothèses fortes sur le bruit (voir Broze et al. (2001) pour une discussion plus approfondie sur la non-redondance des conditions de moment d'ordre supérieur pour une estimation efficace basée sur les moments).

De plus, l'estimation $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_v$ peut donner une matrice non définie positive. Dans ce cas, nous pouvons appliquer l'algorithme de Cholesky modifié de Cheng and Higham (1998) à $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_v$ et obtenir une matrice définie positive.

4 Prévision avec les modèles MSV(p)

Comme indiqué précédemment, les modèles MSV(p) peuvent être écrits sous forme de modèle linéaire d'espace d'état sans perte d'informations. La représentation en espace d'état des modèles MSV(p) est donnée par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_t - \mu &= \boldsymbol{h}_t - \mu + \epsilon_t, \\ \boldsymbol{h}_t - \mu &= \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\phi}_j \left(\boldsymbol{h}_{t-j} - \mu\right) + \boldsymbol{v}_t, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où la distribution ϵ_t est approximée par une distribution normale à m variables avec une moyenne nulle et une matrice de covariance Σ_ϵ. Le modèle défini dans (4.1) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{X}}_t &= \mathcal{C}\tilde{\boldsymbol{h}}_t + \epsilon_t, \\ \tilde{\boldsymbol{h}}_{t+1} &= \mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{h}}_t + \tilde{\boldsymbol{v}}_{t+1}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

où

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_t := \boldsymbol{X}_t - \mu,$$

$$\underset{pm\times 1}{\tilde{\boldsymbol{h}}_{t+1}} := \begin{pmatrix} \underset{m\times 1}{\boldsymbol{h}_{t+1} - \mu} \\ \underset{m\times 1}{\boldsymbol{h}_t - \mu} \\ \vdots \\ \underset{m\times 1}{\boldsymbol{h}_{t-p+2} - \mu} \end{pmatrix}, \quad \underset{pm\times m}{\tilde{\boldsymbol{v}}_{t+1}} := \begin{pmatrix} \underset{m\times m}{\boldsymbol{v}_{t+1}} \\ \underset{m\times m}{\boldsymbol{0}} \\ \underset{m\times m}{\boldsymbol{0}} \\ \vdots \\ \underset{m\times m}{\boldsymbol{0}} \end{pmatrix}, \quad \underset{pm\times pm}{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \dots & \boldsymbol{\phi}_{p-1} & \boldsymbol{\phi}_p \\ \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

$$\underset{pm\times pm}{\mathcal{B}} := \mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{v}}_{t+1}\tilde{\boldsymbol{v}}_{t+1}') = \begin{pmatrix} \Sigma_v & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\underset{m\times pm}{\mathcal{C}} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mathbf{0}_m & \dots & \mathbf{0}_m \end{pmatrix}, \quad \underset{m\times m}{\mathcal{D}} := \mathbb{E}(\epsilon_t\epsilon_t') = \Sigma_\epsilon.$$

En utilisant maintenant (4.2), le filtre de Kalman peut être appliqué comme suit :

— Initialisation :

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{1|0} &= \mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{h}}_1) = \mathbf{0}_{(pm\times 1)}, \\ \mathbf{P}_{1|0} &= \mathbb{E}([(\tilde{\boldsymbol{h}}_1 - \mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{h}}_1)][(\tilde{\boldsymbol{h}}_1 - \mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{h}}_1)]') = \mathrm{diag}[\Sigma_v, \dots, \Sigma_v]_{(pm\times pm)}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $\mathbf{P}_{1|0}$ est l'erreur quadratique moyenne associée à $\hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{1|0}$.

— Mise à jour séquentielle :

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t|t} &= \hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1}\mathcal{C}'(\mathcal{C}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathcal{C}' + \mathcal{D})^{-1} \times (\tilde{\boldsymbol{X}}_t - \mathcal{C}\hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t|t-1}), \\ \mathbf{P}_{t|t} &= \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1}\mathcal{C}'(\mathcal{C}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathcal{C}' + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}\mathbf{P}_{t|t-1}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

— Prédiction dans l'échantillon :

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t+1|t} &= \mathcal{A}\hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t|t-1} + \mathcal{A}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathcal{C}'(\mathcal{C}\mathbf{P}_{t|t-1}\mathcal{C}' + \mathcal{D})^{-1} \times (\tilde{\boldsymbol{X}}_t - \mathcal{C}\hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t|t-1}), \\ \mathbf{P}_{t+1|t} &= \mathcal{A}\mathbf{P}_{t|t}\mathcal{A}' + \mathcal{B}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Étant donné (4.5), la prévision de $\tilde{\boldsymbol{X}}_{t+1}$ et l'erreur quadratique moyenne (MSE) de l'erreur de prévision sont données par

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\boldsymbol{X}}}_{t+1|t} &= \mathcal{C}\hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t+1|t}, \\ \mathbb{E}([\tilde{\boldsymbol{X}}_{t+1} - \hat{\tilde{\boldsymbol{X}}}_{t+1|t}][\tilde{\boldsymbol{X}}_{t+1} - \hat{\tilde{\boldsymbol{X}}}_{t+1|t}]') &= \mathcal{C}\mathbf{P}_{t+1|t}\mathcal{C}' + \mathcal{D}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

— Prévision hors échantillon à s pas d'avance :

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t+s|t} &= \mathcal{A}^s\hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t|t}, \\ \hat{\tilde{\boldsymbol{X}}}_{t+s|t} &= \mathcal{C}\hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t+s|t} = \mathcal{C}\mathcal{A}^s\hat{\tilde{\boldsymbol{h}}}_{t|t}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

La prévision à h pas d'avance est calculée à l'aide de (4.7) avec les estimations des paramètres intégrées.

5 Construction d'indices d'incertitude pour le Canada et le Québec

Dans cette section, nous décrivons notre analyse empirique, dans laquelle nous utilisons le modèle DFAVAR-HMSV présenté ci-dessus pour produire des prévisions et construire des indices d'incertitude pour le Canada et le Québec. Nous commençons par constituer deux ensembles de données à partir de la base de données macroéconomiques mensuelles canadienne étendue et transformée (stationnaire), la LCDMA, de Fortin-Gagnon et al. (2022), qui contient des centaines de séries temporelles. Le premier ensemble de données, noté X^C, comprend 99 variables couvrant l'activité réelle au Canada (p. ex. PIB, emploi), les prix (p. ex. IPC, inflation), les agrégats monétaires et les indicateurs financiers. Le deuxième ensemble de données, désigné par X^Q, contient les mêmes 99 variables canadiennes, auxquelles s'ajoutent 28 variables supplémentaires liées à l'activité réelle et aux prix au Québec.

Le tableau A1 en annexe fournit la liste complète des variables utilisées dans notre analyse. Il détaille chaque variable, la région associée (Canada ou Québec) et les statistiques sommaires sur toute la période d'échantillonnage, de février 1990 à décembre 2022. Une limitation importante de notre analyse empirique est la disponibilité des données. Bien que la base de données LCDMA comprenne des variables remontant à 1914, notre échantillon commence en février 1990, afin que nous puissions intégrer des variables macroéconomiques essentielles telles que les indices IPC, les données sur les obligations d'État et de nombreuses variables relatives à l'activité réelle au Québec. Les données sur le PIB du Québec sont également exclues, car elles ne sont disponibles qu'à partir de 1997 et leur inclusion réduirait encore la taille de notre échantillon. Après avoir pris en compte les décalages utilisés dans l'estimation du modèle, les indices d'incertitude sont ensuite construits à partir des prévisions de volatilité de juin 1990 à décembre 2022. Malgré ces limites, notre analyse couvre un large éventail d'indicateurs économiques sur une période significative, englobant divers événements économiques importants qui soutiennent les prévisions macroéconomiques et la construction de nos indices d'incertitude.

La première étape dans la construction de nos indices d'incertitude consiste à estimer les facteurs dynamiques pour X^C et X^Q à l'aide d'une analyse en composantes principales (ACP) avec $p_f = 4$ décalages. Dans les deux cas, nous appliquons le critère d'information de Bai and Ng (2002) pour sélectionner le nombre approprié de facteurs à inclure dans le modèle. Lors de la deuxième étape, les facteurs estimés sont traités comme des variables observées et nous estimons le modèle FAVAR avec $p_y = 4$ décalages pour les régresseurs endogènes. À la troisième étape, les résidus du modèle FAVAR sont utilisés pour estimer les paramètres du modèle de volatilité stochastique multivariée. Compte tenu de la période couverte par les données, nous utilisons un décalage de $p = 1$ pour le modèle de volatilité stochastique multivariée.

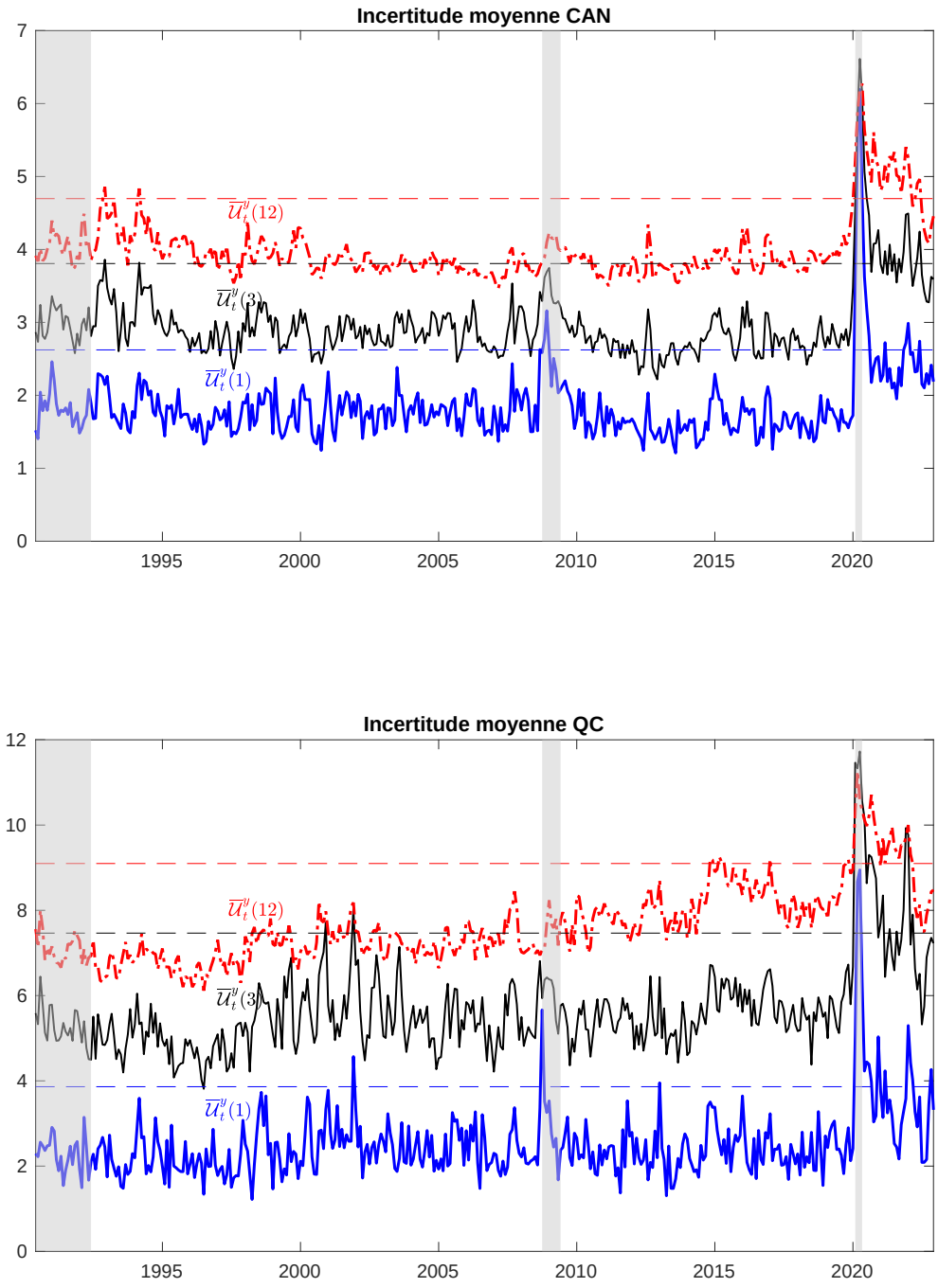
Une fois le modèle DFAVAR-HMSV estimé, la dernière étape consiste à utiliser le cadre du filtre de Kalman, décrit dans la section 4, pour obtenir des estimations lissées du processus de volatilité non observé et générer des prévisions à différents horizons, h. À partir de ces prévisions, nous appliquons les équations (2.22)-(2.24) de la section 2.3 pour construire des indices d'incertitude pour chaque variable, puis l'indice d'incertitude agrégé moyen transversal (UI) pour le Canada et le Québec. Pour construire l'UI canadien, noté $\mathcal{U}^{CAN}csa,t(h)$, nous utilisons les 99 variables macroéconomiques et financières canadiennes à la fois dans l'estimation du modèle et dans le calcul de l'indice moyen transversal. Pour l'UI du Québec, désigné par $\mathcal{U}^{QC}csa,t(h)$, nous estimons le modèle et produisons des prévisions à l'aide de 127 variables, qui comprennent les 99 variables canadiennes et 28 variables spécifiques au Québec. Cependant, seules les 28 variables macroéconomiques spécifiques au Québec sont utilisées pour calculer l'AI agrégé moyen transversal pour le Québec.

La figure 1 affiche $\mathcal{U}^{CAN}csa,t(h)$ dans le panneau supérieur et $\mathcal{U}^{QC}csa,t(h)$ dans le panneau en bas pour $h=1,3,12$, ainsi que les périodes de récession du NBER mises en évidence par des zones grisées. Sur tous les horizons de prévision, la période d'incertitude la plus élevée au Canada est la récession liée à la COVID-19 de 2020 à 2021. Parmi les autres périodes d'incertitude élevée notables dans l'échantillon, on peut citer la Grande Récession de 2007 à 2009 et les conséquences de la récession du début des années 1990. Les lignes pointillées représentent le seuil calculé comme étant 1,65 fois l'écart type au-dessus de la moyenne de l'échantillon de chaque indice d'incertitude. Il est important de noter que les moyennes de l'échantillon, et par conséquent les seuils, sont influencés par l'inclusion de la période d'incertitude relativement élevée liée à la COVID-19. Par conséquent, même si les autres périodes d'incertitude élevée mentionnées précédemment ne dépassent pas toujours ces seuils, elles doivent néanmoins être considérées comme des périodes d'incertitude relativement élevée.

Pour le Québec, nous observons des résultats similaires, avec les distinctions suivantes : (1) L'incertitude est restée élevée pendant une période beaucoup plus longue après la récession liée à la COVID-19 qu'au Canada ; (2) L'incertitude a commencé à augmenter avant la récession liée à la COVID-19, en particulier si l'on considère l'horizon de prévision plus long $h=12$; (3) La période post-récession du début des années 1990 n'a pas présenté d'incertitude particulièrement élevée par rapport à la situation canadienne, contrairement à la période du début des années 2000.

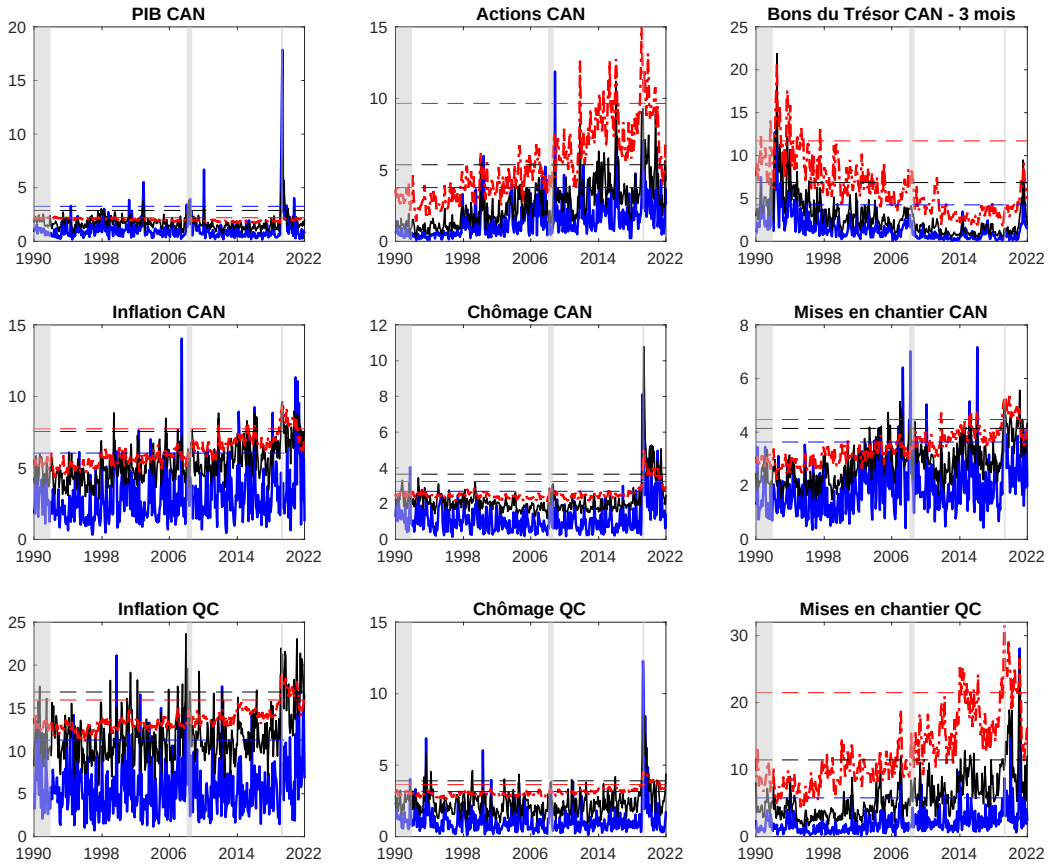
La figure 2 présente les indices d'incertitude pour les principales variables macroéconomiques au Canada et au Québec. La première ligne affiche les indices pour le PIB du Canada, l'indice boursier et les obligations d'État à court terme. La deuxième ligne montre les indices pour l'inflation, le chômage et les mises en chantier au Canada. Dans la troisième ligne, les indices d'incertitude correspondants pour l'in-

Figure 1. Indice d'incertitude de la moyenne transversale (CSA) pour le Canada (en haut) et le Québec (en bas)



Remarques : Les indices d'incertitude canadiens $\mathcal{U}_{csa,t}^{CAN}(h)$ (en haut) et les indices d'incertitude québécois $\mathcal{U}_{csa,t}^{QC}(h)$ (en bas) pour $h=1$ (bleu), $h=3$ (noir) et $h=12$ (rouge), calculés à l'aide de 2.24 et des ensembles de données X^C et X^Q, respectivement, sont présentés. Les lignes pointillées correspondent à 1,65 fois l'écart type au-dessus de la moyenne de l'échantillon de chaque indice d'incertitude. La zone grisée met en évidence les périodes de récession du NBER.

Figure 2. Indice clé d'incertitude pour le Canada et le Québec



Remarques : Les indices clé d'incertitude pour le Canada $\mathcal{U}^{CAN}_{csa,t}(h)$ (en haut et au milieu) et les indices clé d'incertitude pour le Québec $\mathcal{U}^{QC}_{csa,t}(h)$ (en bas), pour $h=1$ (bleu), $h=3$ (noir) et $h=12$ (rouge), calculés à partir de 2.24 et des jeux de données X^C et X^Q respectivement, sont présentés. Les lignes pointillées correspondent à 1,65 fois l'écart type au-dessus de la moyenne de l'échantillon de chaque indice d'incertitude. La zone grisée met en évidence les périodes de récession selon le NBER.

flation, le chômage et les mises en chantier au Québec sont présentés.

De manière générale, plusieurs tendances intéressantes deviennent apparentes. L'incertitude concernant l'ensemble des principales variables macroéconomiques augmente durant la récession liée à la COVID-19, mais seules l'inflation, l'indice boursier canadien et les mises en chantier ont montré une incertitude accrue durant la Grande Récession. De plus, l'indice d'incertitude associé à l'indice boursier canadien était en hausse depuis un certain temps et n'a commencé à diminuer qu'après la période de la COVID-19. Fait notable, l'indice d'incertitude des mises en chantier au Québec - une variable clé de l'activité réelle liée au marché immobilier - était également élevé. Il a commencé à augmenter après la Grande Récession et demeure relativement élevé même après la récession liée à la COVID-19, en particulier pour les horizons de prévision courts (c'est-à-dire $h = 1$).

Le tableau 1 présente les corrélations entre l'indice d'incertitude canadien, l'indice d'incertitude québécois et les principaux indices d'incertitude macroéconomique mentionnés ci-dessus, pour différents horizons : $h = 1$ en haut, $h = 3$ au centre et $h = 12$ en bas. Dans chaque panneau, la partie supérieure de la matrice triangulaire affiche les corrélations sur l'ensemble de l'échantillon, tandis que la partie inférieure montre les corrélations observées uniquement pendant les périodes de récession.

À partir de ces résultats, on observe que la corrélation entre les indices d'incertitude du Canada et du Québec augmente durant les périodes de récession. Un schéma similaire se dégage pour les indices d'incertitude des principales variables macroéconomiques lorsque des indices correspondants sont disponibles pour le Québec. Sur l'ensemble de l'échantillon, les corrélations entre les indices d'incertitude du Québec et du Canada, en particulier à court terme, ne sont pas particulièrement élevées. En revanche, durant les périodes de récession, les corrélations deviennent nettement plus fortes, surtout aux horizons plus longs (c'est-à-dire $h = 12$). Bien que les graphiques montrent que l'incertitude au Québec ne correspond pas toujours à celle du Canada (notamment au début de la période), ces corrélations indiquent que les incertitudes demeurent fortement interconnectées en période de récession.

Les corrélations plus élevées observées durant les périodes de récession suggèrent que l'incertitude économique au Québec et au Canada tend à devenir plus synchronisée dans ces phases du cycle économique, ce qui pourrait refléter des liens plus étroits entre les conditions économiques régionales et nationales en période de ralentissement. À l'inverse, les corrélations plus faibles en dehors des récessions peuvent indiquer que les moteurs de l'incertitude diffèrent entre le Canada et le Québec en période de stabilité. Cela reflète possiblement des dynamiques économiques régionales ou des facteurs sectoriels spécifiques. Le fait que l'incertitude au Québec ne corresponde pas toujours à celle du Canada — en particulier au début de la période — met en évidence les caractéristiques économiques propres à la province et ses ré-

Tableau 1. Corrélation entre les indices d'incertitude moyens et principaux du Canada et du Québec

	CAN CSA	QC CSA	QC Inf.	QC Unemp.	QC H.S.	CAN Inf.	CAN Unemp.	CAN H.S.
				h = 1				
CAN CSA		0.76	0.46	0.54	0.42	0.27	0.52	0.34
QC CSA	0.93		0.28	0.59	0.31	0.26	0.57	0.40
QC Inf.	0.33	0.23		-0.02	0.12	0.37	0.24	0.07
QC Unemp.	0.88	0.86	0.05		0.24	-0.02	0.53	0.22
QC H.S.	0.71	0.69	-0.14	0.83		0.04	0.28	0.19
CAN Inf.	0.12	0.06	0.51	-0.18	-0.12		0.08	0.19
CAN Unemp.	0.70	0.71	0.34	0.75	0.53	-0.05		0.14
CAN H.S.	0.58	0.59	0.21	0.48	0.28	0.14	0.30	
				h = 3				
CAN CSA		0.70	0.64	0.64	0.66	0.55	0.62	0.55
QC CSA	0.91		0.52	0.59	0.46	0.48	0.81	0.54
QC Inf.	0.77	0.68		0.27	0.40	0.42	0.39	0.40
QC Unemp.	0.87	0.88	0.53		0.44	0.27	0.57	0.27
QC H.S.	0.76	0.73	0.45	0.77		0.52	0.39	0.63
CAN Inf.	0.76	0.83	0.66	0.64	0.57		0.43	0.64
CAN Unemp.	0.74	0.89	0.52	0.84	0.59	0.76		0.32
CAN H.S.	0.75	0.80	0.61	0.62	0.69	0.71	0.57	
				h = 12				
CAN CSA		0.50	0.97	0.94	0.98	0.90	0.67	0.89
QC CSA	0.85		0.61	0.69	0.39	0.45	0.91	0.42
QC Inf.	1.00	0.85		0.97	0.92	0.85	0.76	0.84
QC Unemp.	0.98	0.88	0.98		0.87	0.82	0.81	0.79
QC H.S.	0.99	0.82	0.98	0.95		0.90	0.56	0.90
CAN Inf.	0.94	0.86	0.93	0.90	0.94		0.66	0.99
CAN Unemp.	0.89	0.97	0.89	0.90	0.86	0.92		0.62
CAN H.S.	0.93	0.83	0.93	0.89	0.94	1.00	0.90	

Remarques : Les trois panneaux présentent la corrélation entre la moyenne transversale (CSA) et les principaux indices d'incertitude pour le Canada (CAN) et le Québec (QC) à l'horizon $h = 1$ (panneau supérieur), $h = 3$ (panneau central) et $h = 12$ (panneau inférieur). Ici, 'Inf.' désigne l'inflation, 'Unemp.' le chômage, et 'H.S.' les mises en chantier. Pour chaque panneau, la partie supérieure de la matrice triangulaire affiche les corrélations sur l'ensemble de l'échantillon (de février 1990 à décembre 2022), tandis que la partie inférieure montre les corrélations observées uniquement durant les périodes de récession.

ponses particulières aux chocs macroéconomiques, ce qui pourrait justifier une analyse plus approfondie de la résilience économique au niveau provincial. Les corrélations fortes observées en période de récession soulignent par ailleurs l'importance de réponses politiques coordonnées entre les gouvernements provinciaux et fédéral afin de faire face à l'incertitude économique et de stabiliser à la fois les économies régionales et nationale.

6 Comparaison avec Moran et al. (2022)

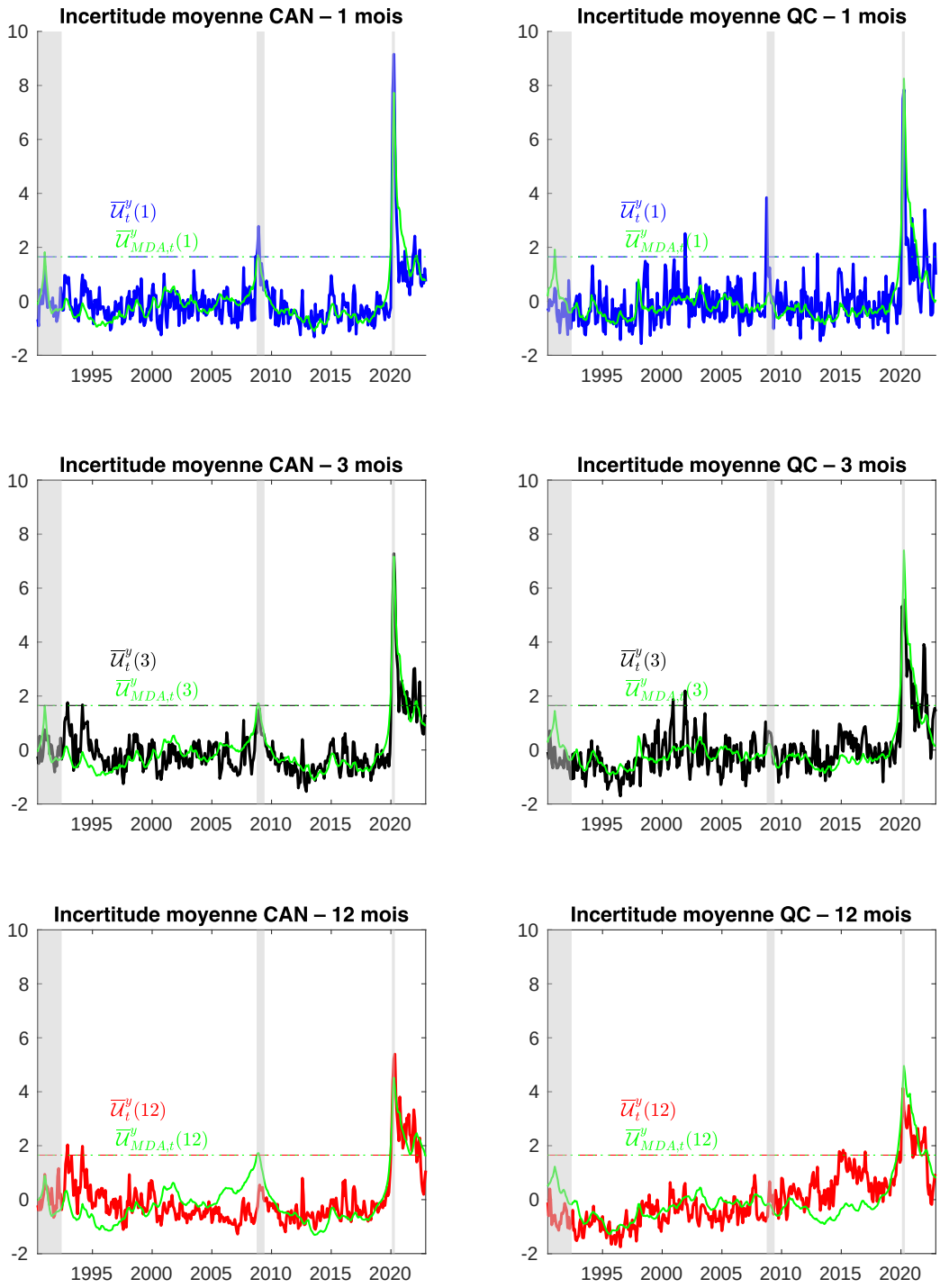
Puisque cette étude complète Moran et al. (2022), nous comparons à présent nos mesures d'incertitude pour le Canada et le Québec aux résultats de cette étude. Les mesures d'incertitude proposées par ces auteurs sont publiquement disponibles et régulièrement mises à jour[2], et nous utilisons ces données dans nos comparaisons. Ces mesures reposent également sur la vaste base de données macroéconomiques de Fortin-Gagnon et al. (2022), mais la distinction essentielle réside dans notre méthodologie, qui prolonge celle de Jurado et al. (2015) - et donc celle utilisée dans Moran et al. (2022). Contrairement à ces travaux antérieurs, notre approche tient compte à la fois des dépendances contemporaines et croisées dans les volatilités, ainsi que des dépendances transversales dans les termes d'erreur.

La figure 3 présente une comparaison entre nos indices d'incertitude et ceux de Moran et al. (2022), normalisés afin d'assurer la cohérence. Plus précisément, elle montre les indices d'incertitude pour le Canada dans la colonne de gauche et pour le Québec dans la colonne de droite, avec des horizons de $h = 1$ mois dans la première ligne, $h = 3$ mois dans la deuxième ligne, et $h = 12$ mois dans la troisième ligne. La mesure d'incertitude de Moran et al. (2022) est toujours représentée en vert.

Les mesures concurrentes présentent des dynamiques similaires et sont positivement corrélées. Les indices d'incertitude pour le Canada affichent une corrélation de 0,83 aux horizons de $h = 1$ et $h = 3$ mois, mais celle-ci diminue à 0,70 pour $h = 12$ mois. Du côté du Québec, les corrélations sont de 0,69 pour $h = 1$ et $h = 12$ mois, avec une corrélation plus élevée de 0,77 à l'horizon de $h = 3$ mois. Toutefois, notre mesure proposée présente des différences notables. Par exemple, à l'horizon de $h = 1$ mois, elle indique un niveau d'incertitude plus élevé durant la période de la COVID-19 pour le Canada, ainsi qu'un niveau d'incertitude nettement plus important durant la Grande Récession et les années précédentes pour le Québec. Aux horizons plus longs, notre mesure détecte également une incertitude accrue au Canada à la suite de la récession du début des années 1990. Pour le Québec, la mesure d'incertitude à $h = 12$ mois met en évidence des niveaux d'incertitude beaucoup plus élevés dans les années précédant la récession liée à la

2. La mesure proposée dans Moran et al. (2022) est disponible à l'adresse suivante : https://chairemacro.esg.uqam.ca/previsions-et-mesures-macroeconomiques/mesure-dincertitude/.

Figure 3. Comparaison des indices d'incertitude moyens (CSA) pour le Canada (à gauche) et le Québec (à droite)



Remarques : Les indices d'incertitude canadiens $\mathcal{U}^{CAN}csa,t(h)$ (à gauche) et québécois $\mathcal{U}^{QC}csa,t(h)$ (à droite) pour $h=1$ (en bleu, première ligne), $h=3$ (en noir, deuxième ligne) et $h=12$ (en rouge, troisième ligne), calculés à l'aide de 2.24 et des ensembles de données X^C et X^Q respectivement, sont présentés. Les lignes vertes $\mathcal{U}_{MDA,t}(h)$ correspondent aux mesures d'incertitude de Moran et al. (2022) pour l'horizon et le niveau d'agrégation (national ou régional) correspondants. Tous les indices ont été normalisés afin de permettre la comparaison. Les lignes pointillées correspondent à 1,65 fois l'écart-type au-dessus de la moyenne de l'échantillon de chaque indice d'incertitude. Les zones grises ombrées indiquent les périodes de récession selon le NBER.

COVID-19. Enfin, dans tous les cas, notre mesure indique une nouvelle poussée d'incertitude, de courte durée, après la récession de la COVID-19.

7 Conclusion

Dans cette étude, nous proposons un modèle VAR augmenté de facteurs avec un cadre de volatilité stochastique multivariée d'ordre supérieur (DFAVAR-HMSV) pour prévoir la volatilité et construire des indices d'incertitude. Plus précisément, notre approche s'appuie sur les cadres introduits par Ahsan and Dufour (2021, 2023) pour la modélisation de la volatilité stochastique, et prolonge les travaux de Jurado et al. (2015) et Moran et al. (2022) en intégrant à la fois des dépendances contemporaines et croisées dans les volatilités, ainsi que des dépendances transversales dans les termes d'erreur, pour le calcul des indices d'incertitude macroéconomique agrégés. Cette extension permet d'obtenir des indicateurs susceptibles de mieux refléter l'état de l'économie. Nous développons des estimateurs pour le modèle DFAVAR-HMSV, utilisons une approche par filtrage de Kalman pour produire des prévisions, et construisons ces indicateurs d'incertitude. Enfin, nous appliquons notre méthodologie pour construire des indices d'incertitude agrégés et ciblés pour le Canada et le Québec.

Notre analyse empirique met en évidence plusieurs tendances clés dans la relation entre l'incertitude au Québec et au Canada. En période de récession, l'incertitude devient fortement synchronisée, avec des corrélations particulièrement élevées aux horizons plus longs ($h = 12$), ce qui suggère que les chocs macroéconomiques de grande ampleur peuvent engendrer une incertitude uniforme à travers les régions. En revanche, les corrélations plus faibles en période de stabilité reflètent des différences régionales dans les dynamiques économiques, le Québec affichant souvent des réponses distinctes aux événements macroéconomiques. Ces résultats soulignent l'importance d'intégrer des indices d'incertitude régionaux en complément des mesures nationales afin de mieux capturer l'ensemble des risques économiques. De plus, les corrélations accrues en période de récession mettent en lumière la nécessité de réponses politiques coordonnées entre les gouvernements provinciaux et fédéral pour gérer efficacement l'incertitude économique et stabiliser les économies régionale et nationale. Enfin, les tendances observées suggèrent également que les modèles de prévision pourraient tirer avantage de l'intégration conjointe des mesures d'incertitude régionales et nationales, en particulier durant les périodes de fortes tensions économiques.

Références

Ahsan, M. N. and Dufour, J.-M. (2021), 'Simple estimators and inference for higher-order stochastic volatility models', *Journal of Econometrics* **224**(1), 181–197, doi:https ://doi.org/10.1016/j.jeconom.2021.03.008. Annals Issue : PI Day.

Ahsan, M. N. and Dufour, J.-M. (2023), Practical estimation methods for high-dimensional multivariate stochastic volatility models, Technical report, McGill University.

Bai, J. and Ng, S. (2002), 'Determining the number of factors in approximate factor models', *Econometrica* **70**(1), 191–221.

Beliansk, A., Eyquem, A. and Poilly, C. (2021), The transmission channels of government spending uncertainty, Working Paper DP15894, CEPR.

Breidt, F. J. and Carriquiry, A. L. (1996), Improved quasi-maximum likelihood estimation for stochastic volatility models, *in* W. O. Johnson, J. C. Lee and A. Zellner, eds, 'Modelling and Prediction : Honouring Seymour Geisel', Springer-Verlag, New York, pp. 228–247.

Broze, L., Francq, C. and Zakoïan, J.-M. (2001), 'Non-redundancy of high order moment conditions for efficient GMM estimation of weak AR processes', *Economics Letters* **71**(3), 317–322, doi:10.1016/S0165-1765(01)00387-1.

Carriero, A., Clark, T. E. and Marcellino, M. (2016), 'Common drifting volatility in large Bayesian VARs', *Journal of Business & Economic Statistics* **34**(3), 375–390.

Carriero, A., Clark, T. E. and Marcellino, M. (2018), 'Measuring uncertainty and its impact on the economy', *Review of Economics and Statistics* **100**(5), 799–815.

Carriero, A., Clark, T. E. and Marcellino, M. (2019), 'Large Bayesian vector autoregressions with stochastic volatility and non-conjugate priors', *Journal of Econometrics* **212**(1), 137–154.

Chan, J. C. (2020), 'Large Bayesian VARs : A flexible Kronecker error covariance structure', *Journal of Business & Economic Statistics* **38**(1), 68–79.

Cheng, S. H. and Higham, N. J. (1998), 'A modified cholesky algorithm based on a symmetric indefinite factorization', *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **19**(4), 1097–1110, doi:10.1137/S0895479896302898.

Chib, S., Nardari, F. and Shephard, N. (2002), 'Markov chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models', *Journal of Econometrics* **108**, 281–316, doi:10.1016/S0304-4076(01)00137-3.

Clark, T. E. (2011), 'Real-time density forecasts from Bayesian vector autoregressions with stochastic volatility', *Journal of Business & Economic Statistics* **29**(3), 327–341.

Cogley, T. and Sargent, T. J. (2005), 'Drifts and volatilities : monetary policies and outcomes in the post WWII US', *Review of Economic Dynamics* **8**(2), 262–302.

Fortin-Gagnon, O., Leroux, M., Stevanovic, D. and Surprenant, S. (2022), 'A large Canadian database for macroeconomic analysis', *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique* **55**(4), 1799–1833, doi:10.1111/caje.12618.

Francq, C. and Zakoïan, J.-M. (2006), 'Linear-representation based estimation of stochastic volatility models', *Scandinavian Journal of Statistics* **33**(4), 785–806.

Harvey, A. C. and Shephard, N. (1996), 'Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns', *Journal of Business and Economic Statistics* **14**(4), 429–434.

Harvey, A., Ruiz, E. and Shephard, N. (1994), 'Multivariate stochastic variance models', *The Review of Economic Studies* **61**, 247–264.

Jurado, K., Ludvigson, S. C. and Ng, S. (2015), 'Measuring uncertainty', *American Economic Review* **105**(3), 1177–1216.

Kim, S., Shephard, N. and Chib, S. (1998), 'Stochastic volatility : Likelihood inference and comparison with ARCH models', *The Review of Economic Studies* **65**, 361–393.

Knight, J. L., Satchell, S. E. and Yu, J. (2002), 'Estimation of the stochastic volatility model by the empirical characteristic function method', *Australian and New Zealand Journal of Statistics* **44**(3), 319–335.

Koop, G. and Korobilis, D. (2013), 'Large time-varying parameter VARs', *Journal of Econometrics* **177**(2), 185–198.

Moran, K., Stevanovic, D. and Touré, A. K. (2022), 'Macroeconomic uncertainty and the COVID-19 pandemic : Measure and impacts on the Canadian economy', *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique* **55**, 379–405.

Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. and Nakajima, J. (2007), 'Stochastic volatility with leverage : Fast and efficient likelihood inference', *Journal of Econometrics* **140**(2), 425–449.

Politis, D. N. (2009), 'An algorithm for robust fitting of autoregressive models', *Economics Letters* **102**(2), 128–131, doi:10.1016/j.econlet.2008.12.004.

Ruiz, E. (1994), 'Quasi-maximum likelihood estimation of stochastic variance models', *Journal of Econometrics* **63**, 284–306.

Sandmann, G. and Koopman, S. J. (1998), 'Estimation of stochastic volatility models via Monte Carlo maximum likelihood', *Journal of Econometrics* **87**(2), 271–301.

Shephard, N. (1994), 'Partial non-Gaussian state space', *Biometrika* **81**(1), 115–131.

Steel, M. F. (1998), 'Bayesian analysis of stochastic volatility models with flexible tails', *Econometric Reviews* **17**(2), 109–143.

Annexe

TABLEAU A1 Liste des variables utilisées, région et statistiques sommaires

Description	Région	Min	Médiane	Moyenne	Max	Écart-type	25%	75%
New housing price index, total (house and land)	QC	-0.01	0	0	0.05	0	0	0
Housing starts (units)	QC	-45.95	0.01	-0.03	61.69	7.99	-3.93	3.74
Building permits (all)	QC	-0.61	0	0	0.56	0.15	-0.08	0.08
Building permits (industries)	QC	-2.39	0.02	0	1.96	0.55	-0.31	0.3
Building permits (commercial)	QC	-1.13	0	0	0.9	0.29	-0.16	0.17
Employment, total	QC	-0.15	0	0	0.07	0.01	0	0
Employment, services	QC	-0.11	0	0	0.08	0.01	0	0
Employment, forestry, fishing, mining, oil and gas	QC	-0.23	0	0	0.24	0.05	-0.03	0.03
Employment, construction	QC	-0.5	0	0	0.39	0.04	-0.02	0.02
Employment, sales (wholesale and retail trade)	QC	-0.18	0	0	0.09	0.02	-0.01	0.01
Employment, finance, insurance and real estate	QC	-0.09	0	0	0.07	0.02	-0.01	0.01
Employment, manufacturing	QC	-0.23	0	0	0.12	0.02	-0.01	0.01
Unemployment rate	QC	-4.2	0	-0.02	9.7	0.7	-0.2	0.2
Employment, part time	QC	-0.24	0	0	0.25	0.03	-0.02	0.02
Unemployment, average duration	QC	-0.7	0	0	0.45	0.13	-0.06	0.07
Employment insurance, initial claims, Allowed	QC	37731.09	50367.29	53206.11	295589.43	15659.89	45640.14	55418.52
Hours worked, total	QC	-0.18	0	0	0.13	0.03	-0.01	0.02
Average overtime hours of all employees, Goods-producing sector	QC	-0.27	0	0	0.13	0.03	-0.01	0.02
Manufacturing, new orders (total)	QC	-0.32	0.01	0	0.17	0.05	-0.02	0.03
Manufacturing, new orders (durables)	QC	-0.02	0	0	0.04	0	0	0
Consumer price index (CPI) (all)	QC	-0.01	0	0	0.02	0	0	0
CPI (shelter)	QC	-0.06	0	0	0.12	0.02	-0.01	0.01
CPI (clothing and footwear)	QC	-0.01	0	0	0.06	0.01	0	0
CPI (health and personal care)	QC	-0.02	0	0	0.04	0	0	0
CPI (all minus food)	QC	-0.02	0	0	0.04	0	0	0
CPI (all minus food and energy)	QC	-0.04	0	0	0.04	0.01	0	0.01
CPI (goods)	QC	-0.03	0	0	0.04	0.01	0	0
CPI (durable goods)	QC	-0.01	0	0	0.03	0	0	0
GDP, total	CAN	-0.11	0	0	0.06	0.01	0	0
GDP, business	CAN	-0.12	0	0	0.07	0.01	0	0
GDP, goods	CAN	-0.16	0	0	0.08	0.01	0	0.01
GDP, services	CAN	-0.09	0	0	0.06	0.01	0	0
GDP, industrial production	CAN	-0.17	0	0	0.06	0.01	0	0.01
GDP, non durable goods	CAN	-0.14	0	0	0.06	0.01	-0.01	0.01
GDP, durables	CAN	-0.32	0	0	0.18	0.03	-0.01	0.01
GDP, mining, petrol and gas	CAN	-0.13	0	0	0.07	0.02	-0.01	0.01
GDP, construction	CAN	-0.19	0	0	0.14	0.02	0	0.01
GDP, retail trade	CAN	-0.2	0	0	0.16	0.02	0	0.01
GDP, wholesale trade	CAN	-0.2	0	0	0.16	0.02	0	0.01
GDP, public administration	CAN	-0.05	0	0	0.04	0.01	0	0
GDP, finance and insurance	CAN	-0.18	0	0	0.2	0.06	-0.04	0.05
Crude oil production (cubic metres)	CAN	-0.12	0	0	0.06	0.01	0	0
Employment, total	CAN	-0.1	0	0	0.06	0.01	0	0
Employment, services	CAN	-0.1	0	0	0.05	0.02	-0.01	0.01
Employment, forestry, fishing, mining, oil and gas	CAN	-0.22	0	0	0.08	0.02	0	0.01

Suite à la page suivante ...

Description	Région	Min	Médiane	Moyenne	Max	Écart-type	25%	75%
Employment, construction	CAN	-0.16	0	0	0.09	0.01	0	0
Employment, sales (wholesale and retail trade)	CAN	-0.02	0	0	0.03	0.01	0	0.01
Employment, finance, insurance and real estate	CAN	-0.17	0	0	0.06	0.01	0	0
Employment, manufacturing	CAN	-0.19	0	0	0.17	0.02	-0.01	0.01
Employment, part time	CAN	-1.7	0	-0.01	5.2	0.38	-0.1	0.1
Unemployment rate	CAN	-0.33	0	0	0.2	0.05	-0.03	0.03
Unemployment duration (1-4 weeks)	CAN	131794.17	170661.61	185270.23	1314736.3	65077.05	165013.07	195764.07
Unemployment duration (5-13 weeks)	CAN	-0.17	0	0	0.1	0.01	0	0
Unemployment duration (14-24 weeks)	CAN	-0.26	0	0	0.12	0.02	-0.01	0.01
Unemployment duration (27+ weeks)	CAN	-0.02	0	0	0.02	0	0	0
Unemployment average duration	CAN	-0.29	0	0	0.27	0.1	-0.06	0.06
Employment insurance, initial claims (allowed)	CAN	-0.27	0.01	0	0.29	0.08	-0.06	0.06
Hours worked, total	CAN	-0.91	0.01	0	0.8	0.28	-0.16	0.18
Hours worked, goods	CAN	-0.54	0.01	0	0.55	0.17	-0.1	0.1
Average overtime hours of all employees, goods-producing sector	CAN	-0.39	0	0	0.19	0.05	-0.02	0.03
New housing price index, total (house and land)	CAN	-0.06	0	0	0.14	0.02	-0.01	0.02
Housing starts (units)	CAN	-0.02	0	0	0.03	0.01	0	0.01
Building permits (all)	CAN	1.23	1.37	1.41	2.43	0.12	1.33	1.45
Building permits (industries)	CAN	1.04	1.17	1.18	1.49	0.08	1.12	1.21
Building permits (commercial)	CAN	-0.59	0.01	0	0.33	0.08	-0.03	0.04
Manufacturing new orders, total	CAN	-0.07	0	0	0.15	0.02	-0.01	0.02
Manufacturing unfilled orders, total	CAN	-0.03	0	0	0.04	0.01	0	0.01
Manufacturing inventories, total	CAN	1.28	1.57	1.62	3.62	0.22	1.48	1.69
Manufacturing inventories to shipments ratio, total	CAN	-0.02	0.01	0.01	0.03	0.01	0	0.01
Manufacturing inventories to shipments ratio (durables)	CAN	-0.01	0	0	0.03	0	0	0.01
Manufacturing new orders (durables)	CAN	-0.15	0	0.01	0.64	0.04	0	0.01
Manufacturing unfilled orders (durables)	CAN	-0.06	0.01	0.01	0.07	0.02	0	0.01
Manufacturing inventories (durables)	CAN	-0.02	0	0.01	0.13	0.01	0	0.01
Manufacturing inventories to shipments ratio (durables)	CAN	-0.04	0.01	0.01	0.38	0.02	0	0.01
M3 (gross)	CAN	-0.02	0.01	0.01	0.19	0.01	0	0.01
M2+ (gross)	CAN	-0.02	0	0	0.05	0	0	0.01
Monetary base	CAN	-0.01	0.01	0.01	0.02	0	0	0.01
Business loans, chartered banks only	CAN	-0.01	0	0.01	0.03	0	0	0.01
Personal loans, chartered banks only	CAN	-0.02	0	0.01	0.03	0.01	0	0.01
Residential mortgages, total, chartered banks only	CAN	-1.58	0	-0.02	1.68	0.32	0	0
Total loans, chartered banks only	CAN	-0.96	-0.01	-0.02	1.78	0.31	-0.15	0.11
Credit liabilities of households, non-mortgage loans	CAN	-0.96	-0.02	-0.02	1.56	0.29	-0.16	0.14
Credit liabilities of households, residential mortgages	CAN	-0.78	-0.03	-0.02	1.13	0.26	-0.17	0.13
Credit liabilities of households, total credit liabilities of households	CAN	-0.67	-0.02	-0.02	0.92	0.22	-0.15	0.11
Credit liabilities of private non-financial corporations, total credit	CAN	-1.05	0	-0.02	1.75	0.3	-0.1	0
Bank rate	CAN	-1	0	-0.02	1.7	0.26	-0.1	0
Governmental bonds (average rate) (1-3 years)	CAN	-1.46	-0.01	-0.02	2.55	0.35	-0.1	0.06
Governmental bonds (average rate) (3-5 years)	CAN	-1.41	0	-0.02	2.82	0.36	-0.1	0.08
Governmental bonds (average rate) (5-10 years)	CAN	-0.24	0	0.01	0.22	0.04	-0.01	0.02
Governmental bonds (average rate) (10+ years)	CAN	-0.37	0.01	0.01	0.28	0.06	-0.02	0.02
Mortgage rate (1 year)	CAN	-0.38	0	0.01	0.55	0.07	-0.01	0.02
Mortgage rate (5 years)	CAN	-0.26	0	0	0.19	0.03	-0.01	0.02
Treasury bills (3 months)	CAN	-0.81	0.01	0	0.72	0.18	-0.1	0.12

Suite à la page suivante ...

Description	Région	Min	Médiane	Moyenne	Max	Écart-type	25%	75%
Treasury bills (6 months)	CAN	-0.33	0.01	0	0.18	0.04	-0.01	0.02
Government bonds (1-3 years) - bank rate	CAN	-0.98	0.01	0.01	0.82	0.12	-0.04	0.07
Government bonds (3-5 years) - bank rate	CAN	-0.57	0.01	0.01	0.41	0.09	-0.04	0.06
Government bonds (5-10 years) - bank rate	CAN	-0.34	0	0	0.51	0.13	-0.09	0.09
Treasury bond (6 months) - bank rate	CAN	-0.22	0.01	0	0.16	0.06	-0.04	0.04
Government Bonds (10+ years) - treasury bond (3 months)	CAN	-0.3	0	0	0.16	0.05	-0.02	0.03
Canada's official international reserves, total	CAN	-1.67	0	0	1.1	0.13	-0.04	0.04
Canadian USD reserves	CAN	-0.18	0.01	0.01	0.18	0.04	-0.02	0.03
Canadian reserve position at the IMF	CAN	-0.2	0	0	0.21	0.06	-0.03	0.04
Imports, total	CAN	-0.48	0	0	0.48	0.05	-0.02	0.03
Imports, oil	CAN	-1.27	0.01	0	1.14	0.1	-0.03	0.03
Exports, total	CAN	-0.11	0.01	0	0.08	0.03	-0.01	0.02
Exports, oil	CAN	-0.06	0	0	0.11	0.02	-0.01	0.01
Export, energy products	CAN	-0.09	0	0	0.18	0.03	-0.02	0.02
Exports, non-metallic ores	CAN	-0.09	0	0	0.07	0.02	-0.01	0.01
Exports, metal and other mineral products	CAN	-23525	648	1016.46	37141	4266.91	-338.75	2354.75
Exports, industrial machinery, parts and equipment	CAN	-24986	3742	5334.47	52614	8936.63	421.25	9334.25
Exports, motor vehicles and parts	CAN	-42025	1872	2780.75	28029	6155.89	292.25	5018
Exports, consumption goods	CAN	-19447	2612	3432.13	36172	6248.92	25.75	6789.25
Imports, metal and other mineral products	CAN	-0.01	0	0	0.03	0	0	0
Imports, industrial machinery, parts and equipment	CAN	-0.02	0	0	0.02	0	0	0
Imports motor vehicles and parts	CAN	-0.06	0	0	0.06	0.02	-0.01	0.01
Imports, consumer goods	CAN	-0.01	0	0	0.04	0	0	0
Exchange rate, CAD/USD	CAN	-0.01	0	0	0.02	0	0	0
Exchange rate, CAD/JPY	CAN	-0.01	0	0	0.02	0	0	0
Exchange rate, CAD/GBP	CAN	-0.02	0	0	0.03	0.01	0	0
Canadian equity and investment fund shares, net flows	CAN	-0.03	0	0	0.03	0.01	0	0
Canadian securities, net flows	CAN	-0.01	0	0	0.03	0	0	0
Foreign securities, net flows	CAN	-0.03	0	0	0.03	0.01	0	0.01
Canadian securities, United States, net flows	CAN	-0.29	0.01	0	0.16	0.05	-0.02	0.03
Consumer price index (CPI) (all)	CAN	-0.22	0	0	0.16	0.04	-0.01	0.01
CPI (shelter)	CAN	-0.02	0	0	0.05	0.01	0	0
CPI (clothing and footwear)	CAN	-0.04	0	0	0.08	0.01	0	0.01
CPI (health and personal care)	CAN	-0.02	0	0	0.03	0	0	0

Remarques : Les données utilisées dans ce tableau proviennent du jeu de données fourni par Fortin-Gagnon et al. (2022), disponible à l'adresse https://www.stevanovic.uqam.ca/DS_LCMD.html. Ce jeu de données a déjà été transformé afin d'assurer la stationnarité et de constituer un panel équilibré. Aucune transformation ou ajustement supplémentaire n'a été effectué dans cette étude. Pour une description détaillée de la construction et des transformations des données, veuillez vous référer à Fortin-Gagnon et al. (2022)